激光脉冲的频谱分析

华 东 工 程 学 院　　王 其 祥

本文主要讨论激光脉冲通过光切割器(如超快速光闸)后的频谱时变问题。由于单色波的概念是频谱理论中的基本概念，所以本文开始先就与单色波概念有关的两个问题，作为常识来介绍。

一、光波振幅变化引起的频率扩展

光波的频谱特性，是通过光束中任意点P之光扰动的频谱特性来描写的。严格地说，只有当P点的光扰动是简谐振动时，才能称这个波列为单色波，简谐振动的振动方程为

$$f(t)=E_0\cos(\omega t+\varphi),$$

其特点是不仅ω是常数，而且E_0也是常数。可以证明，任何振幅不是常数的振动，都不是简谐振动；它一定是由若干个谐波组合而成。例如，设有一列沿X轴传播的平面波，其波动方程为

$$f(t,x)=E_M\cos(\omega t-kx) \tag{1}$$

它的振幅E_M随时间而变，变化规律为

$$E_M=E_0(1+\cos\omega_0 t) \tag{2}$$

其中E_0是常数。显然，这是一列振幅受到周期性调制的波列。这样的波列，是不能称之为单色波的。为了更清楚地看出这一点，把(2)式代入(1)式，即得

$$f(t,x)=E_0(1+\cos\omega_0 t)\cos(\omega t-kx)=E_0\cos(\omega t-kx)+$$

$$\frac{E_0}{2}\cos\left[(\omega-\omega_0)t-kx\right]+\frac{E_0}{2}\cos\left[(\omega+\omega_0)t-kx\right] \tag{3}$$

可见，这个波列实质上由三个子波列叠加而成。它们都是单色波，圆频率分别为$\omega-\omega_0$、ω、$\omega+\omega_0$，振幅分别为$\frac{E_0}{2}$、E_0、$\frac{E_0}{2}$。

在一般情况下，若振幅E_M是变动的，则它可以表示成时间的函数

$$E_M=E_M(t),$$

当它是以2T为周期的周期函数时，就可以把它展开成福里哀级数

收稿日期：1980年2月4日。

$$E_M(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{T}+b_n\cos\frac{n\pi t}{T}\right) \tag{4}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}E_M(t)dt$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}E_M(t)\cos\frac{n\pi t}{T}dt$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}E_M(t)\sin\frac{n\pi t}{T}dt$$

而(4)式又可化为

$$E_M(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi t}{T}+\theta_n\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\left(n\omega_0 t+\theta_n\right) \tag{5}$$

其中

$$A_n=\sqrt{a^2{}_n+b^2{}_n}$$

$$\theta_n=\tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{2T}$$

因此得

$$f(t,x)=E_M(t)\cos(\omega t-kx)$$

$$=\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)\right]\cos(\omega t-kx)=\frac{a_0}{2}\cos(\omega t-kx)+$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{A_n}{2}\cos\left[(\omega-n\omega_0)t-kx-\theta_n\right]+\frac{A_n}{2}\cos\left[(\omega+n\omega_0)t-kx+\theta_n\right]\right\} \tag{6}$$

上式表明，当$E_M(t)$为周期函数时，波列$f(t,x)$可以分解成一系列离散频率的单色波之和。

如果$E_M(t)$不是时间t的周期函数，则可以利用福里哀积分，直接求出$f(t,x)$的频谱分布函数$F(u,x)$：

$$F(u,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,x)e^{-2\pi iut}\,dt \tag{7}$$

在这种情况下，波列$f(t,x)$是一系列连续频率的正弦波之积分：

$$f(t,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,x)e^{2\pi iut}\,du \tag{8}$$

由此可见，若光束中任意点P之光扰动，其振幅E_M不是常数，则这束光一定不是单色光。

二、光波的作用时间对频谱的影响

任何实际的波列，其作用时间都是有限的。设波列的作用时间为$t\varepsilon[-T,T]$,若在这段时间间隔内，光扰动的振幅E_0和频率u_0都保持不变,试问,这样的波列能不能称之为单色波？下面来分析这个问题。

如上所述之光扰动，其数学模型为

$$f(t)=P_T(t)E_0\cos2\pi u_0t \tag{9}$$

其中的$P_T(t)$是矩形脉冲函数，定义表达式为

$$P_T(t)=\begin{cases}1, & \text{当}t\varepsilon[-T,T]\text{时}\\ 0, & \text{当}t\text{为其余值时}\end{cases} \tag{10}$$

$f(t)$的频谱分布函数$F(u)$，可以用福里哀积分来求解：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-2\pi iut}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}P_T(t)E_0\cos2\pi u_0te^{-2\pi iut}\,dt$$

$$=\int_{-T}^{T}E_0\cos2\pi u_0te^{-2\pi iut}\,dt=E_0T\left[\frac{\sin2\pi T(u+u_0)}{2\pi T(u+u_0)}+\frac{\sin2\pi T(u-u_0)}{2\pi T(u-u_0)}\right] \tag{11}$$

显见，上式方括号内两项的基本图象为$\frac{\sin X}{X}$。基本图象向左、右各平移一次，将中心点的坐标移到$u=\pm u_0$处，便得到$F(u)$的图象，如图1所示。

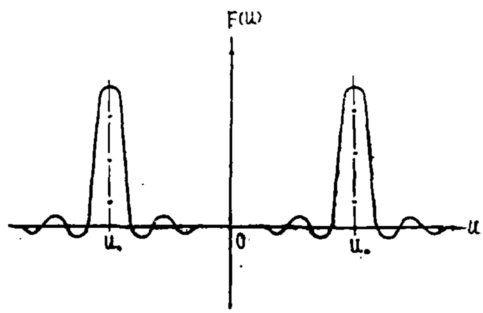

图 1

由此可见，即使在波动的作用时间内使光扰动的振幅E_0和频率u_0都保持不变，但是由于波的作用时间是有限的，所以从更大的时间范围内来看，其振幅仍然是变动的。当$t=-T$时振幅由0突然变到E_0，当$t=T$时振幅突然由E_0变到0。在这种情况下，谱线展宽的程度取决于$\frac{1}{T}$的大小。$\frac{1}{T}$值大，即波的作用时间短，则谱线扩展的宽度也大；$\frac{1}{T}$值小，则反之。在连续激光器中，由于T值是足够大的，故这种展宽可以忽略

不计。但对脉冲激光器来说，特别是对有些产生超短脉冲的激光器来说，一方面由于它的作用时间极短，另一方面在脉冲形成和消失的过程中，光场电矢量的振幅E_M变动十分剧烈，所以它的频率扩展问题必须考虑。它直接影响到光脉冲的光谱成分和能量分布，也影响到光脉冲的传输特性和聚焦特性，并在一定程度上决定了光脉冲的相干性。

从以上的分析中可以看出，理想的单色波不仅频率和振幅不随时间而变化，而且作用时间还必须足够长。

三、光脉冲通过光切割器时的频谱畸变

设光切割器的开关函数为$P_T(t)$，其定义由(10)式给出。又设光波的波动方程为

$$f_0(t,x)=A(t,x)\cos(2\pi u_0 t-kx) \tag{12}$$

则这列光波在通过光切割器后的数学模型为

$$f(t,x)=P_T(t)A(t,x)\cos(2\pi u_0 t-kx) \tag{13}$$

下面我们来研究：通过光切割器后，光波的频谱分布有哪些改变？当我们在光场中的某一确定点来考察频谱畸变时，上两式中的x为常量，故可以将它们表示为t的单变元函数。为了方便，取

$$f_0(t)=A(t)\cos 2\pi u_0 t \tag{14}$$

$$f(t)=P_T(t)A(t)\cos 2\pi u_0 t \tag{15}$$

1. 问题的一般解

设$F_0(u)$和$F(u)$是$f_0(t)$和$f(t)$的频谱分布函数，则

$$F_0(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)e^{-2\pi iut}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\cos 2\pi u_0 t e^{-2\pi iut}\,dt \tag{16}$$

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi iut}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} P_T(t)A(t)\cos 2\pi u_0 t e^{-2\pi iut}\,dt \tag{17}$$

若光束通过光切割器时，频谱分布的畸变用符号$\Delta F(u)$来表示，则

$$\Delta F(u)=F(u)-F_0(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_T(t)-1\right]A(t)\cos 2\pi u_0 t e^{-2\pi iut}\,dt \tag{18}$$

这就是光切割器引起的频谱畸变的一般解。

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_T(t)-1\right]e^{-2\pi iut}\,dt=\frac{\sin 2\pi Tu}{\pi u}-\delta(u) \tag{19}$$

其中的$\delta(u)$为δ函数，所以这个一般解若用“卷积”来表示，则有

$$\Delta F(u)=\left[\frac{\sin 2\pi Tu}{\pi u}-\delta(u)\right]^{*}F_0(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin 2\pi Tx}{\pi x}-\delta(x)\right]F_0(u-x)dx \tag{20}$$

2. 指数型激光脉冲的解

在振幅归一化的条件下，指数型激光脉冲的数学模型取为

$$f_0(t)=e^{-\alpha|t|}\cos 2\pi u_0 t \tag{21}$$

通过光切割器后，其形式变为

$$f(t)=P_T(t)\,e^{-\alpha|t|}\cos 2\pi u_0 t \tag{22}$$

其中$\alpha>0$。即得

$$F_0(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}\cos 2\pi u_0 t\,e^{-2\pi iut}\,dt \tag{23}$$

为了计算上列积分，需应用“卷积定理”。令

$$g_1(t)=e^{-\alpha|t|}$$

$$g_2(t)=\cos 2\pi u_0 t$$

则有

$$G_1(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(t)e^{-2\pi iut}\,dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-2\pi iut}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}\,e^{-2\pi iut}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi iu+\alpha}-\frac{1}{2\pi iu-\alpha}=\frac{2\alpha}{(2\pi u)^2+\alpha^2} \tag{24}$$

$$G_2(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(t)e^{-2\pi iut}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 2\pi u_0 t\,e^{-2\pi iut}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(u+u_0)+\delta(u-u_0)\right] \tag{25}$$

根据福里哀变换的卷积定理，即得

$$F_0(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(t)g_2(t)e^{-2\pi iut}\,dt=G_1(u)*G_2(u) \tag{26}$$

仿上可得

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} P_T(t)e^{-\alpha|t|}\cos 2\pi u_0 t e^{-2\pi iut}dt \tag{27}$$

令

$$g_3(t)=P_T(t)e^{-\alpha|t|}$$

则有

$$G_3(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_3(t)e^{-2\pi iut}dt=\int_{-T}^{T} e^{-\alpha|t|}e^{-2\pi iut}dt$$

$$=\int_0^T e^{-\alpha t}e^{-2\pi iut}dt+\int_{-T}^{0} e^{\alpha t}e^{-2\pi iut}dt$$

$$=\frac{2e^{-\alpha T}}{(2\pi u)^2+\alpha^2}\left[2\pi u\sin 2\pi Tu-\alpha\cos 2\pi Tu\right]+\frac{2\alpha}{(2\pi u)^2+\alpha^2} \tag{28}$$

令

$$G_4(u)=\frac{2e^{-\alpha T}}{(2\pi u)^2+\alpha^2}\left[2\pi u\sin 2\pi Tu-\alpha\cos 2\pi Tu\right] \tag{29}$$

即得

$$G_3(u)=G_4(u)+G_1(u) \tag{30}$$

根据卷积定理，有

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_3(t)g_2(t)e^{-2\pi iut}dt=G_3(u)*G_2(u)$$

$$=\left[G_4(u)+G_1(u)\right]*G_2(u)=G_4(u)*G_2(u)+G_1(u)*G_2(u)$$

$$=G_4(u)*G_2(u)+F_0(u) \tag{31}$$

由上式即得

$$\Delta F(u)=F(u)-F_0(u)=G_4(u)*G_2(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} G_4(x)G_2(u-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha T}}{(2\pi x)^2+\alpha^2}\left(2\pi x\sin 2\pi Tx-\alpha\cos 2\pi Tx\right)\left[\delta(u+u_0-x)+\delta(u-u_0-x)\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha T}}{(2\pi x)^2+\alpha^2}\left(2\pi x\sin 2\pi Tx-\alpha\cos 2\pi Tx\right)\delta(u+u_0-x)dx$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha T}}{(2\pi x)^2+\alpha^2}\Big(2\pi x\,\mathrm{siu}2\pi Tx-\alpha\cos 2\pi Tx\Big)\delta(u-u_0-x)dx$$

$$=\frac{e^{-\alpha T}\Big[2\pi(u+u_0)\sin 2\pi T(u+u_0)-\alpha\cos 2\pi T(u+u_0)\Big]}{4\pi^2(u+u_0)^2+\alpha^2}$$

$$+\frac{e^{\alpha T}\Big[2\pi(u-u_0)\sin 2\pi T(u-u_0)-\alpha\cos 2\pi T(u-u_0)\Big]}{4\pi^2(u-u_0)^2+\alpha^2} \tag{32}$$

这就是指数型激光脉冲通过光切割器所引起的频谱畸变的数学表达式。

由(32)式可知，频谱畸变曲线$\Delta F(u)\sim u$的基本函数为

$$\frac{e^{-\alpha T}\Big[2\pi u\sin 2\pi Tu-\alpha\cos 2\pi Tu\Big]}{(2\pi u)^2+\alpha^2} \tag{33}$$

上列基本函数的图象沿u轴向左、右各平移一次，将原点移到$u=\pm u_0$处，就构成$\Delta F(u)$的图象。若令

$$2\pi u=\omega \tag{34}$$

代入(33)式，即得

$$\frac{e^{-\alpha T}\Big[\omega\sin\omega T-\alpha\cos\omega T\Big]}{\omega^2+\alpha^2}=X(\omega) \tag{35}$$

$$\Delta F(u)=X[2\pi(u+u_0)]+X[2\pi(u-u_0)] \tag{36}$$

我们不妨把$X(\omega)$，称为光切割器对指数型激光脉冲的频谱畸变函数。当切割器的特性参数T和输入脉冲的特性参数(α,u_0)均为已知时，代入(36)式即可求出相应的频谱畸变量。

最后必须说明，由于在前面的讨论中，把$P_T(t)$作为光切割器的开关函数，这实际上忽略了切割器本身的驰豫时间。所以在应用前面的结论时，必须满足这样的条件：输入光脉冲的“沿”，应比光切割器的驰豫时间长得多。对于其它类型的激光脉冲，只要把它的数学模型代入(16)式求出$F_0(u)$，再将$F_0(u)$代入(20)式，即可求出相应的畸变函数$\Delta F(u)$。

(上接第 5 页)

[3] W. Kleen and R. Muller, Laser, Heidelberg New-York, Seite 63. 1969

[4] Квантовая электроника, 1971, No.6, P.3～34。

[5] 重复率钕玻璃器件组，“多次重复脉冲器件的激光发散角”，上海光机所研究报告集，第五集，第1页。