

## 干涉法测量中的信噪比

宋正方

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥, 230031)

**摘要:** 本文根据现代随机介质中波的传播理论, 从二阶互相干函数出发导出了干涉图信噪比的分析表达式, 对不同情况下的结果作了讨论, 表明信噪比决定于光束的波长与宽度, 传播距离和湍流强度等因素。在一定条件下信噪比将趋向于一个常数, 可以用强度起伏的饱和效应来解释这个现象。

### The signal-to-noise ratio in interference measurement

Song Zhengfang

(Anhui Institute of Optics & Fine Mechanics, Academia Sinica)

**Abstract:** Upon the basis of modern wave propagation theory in a random medium, the analytical expressions of the interferogram's signal-to-noise ratio are derived in this paper, starting off with second-order mutual coherence function. Several results for different condition are discussed. These show that the signal-to-noise ratio is dependent on the wave length, width of the wave beam, propagating distance, turbulent intensity, and et cetera. Calculations indicate that the correlation of the intensity fluctuation plaies an important role and the focused beam has not any predominance in comparison with the collimated beam. The interferogram's signal-to-noise ratio will tend towards a constant under a certain condition, which can be interpreted by the saturation effect of optical intensity fluctuation.

### 一、引 言

大气折射在大地测量中的重要性已为越来越多的事实所证明, 为了适应现代高精度的要求, 正在探索有效的大气折射改正方法和新的测量技术。新近实施的干涉法测量有可能适用于较长基线上, 并获得很高的精度。目前甚长基线干涉测量和全球定位系统-基线干涉测量已投入运行。在激光测量技术中也不乏干涉法测量的实例。这说明干涉法测量技术是成功的, 不过在某些场合下其精度却受到随机折射率起伏(即大气湍流)的限制。Prilepin和Medorikov<sup>[1]</sup>曾讨论过闪烁(强度起伏)对干涉图象的影响, 但由于所采用的模式过于简单, 所得结论是值得商榷的。本文根据现代随机介质中波的传播理论, 从二阶互相干函数出发, 讨论

了在不同情况下估价干涉图象信噪比的分析表达式, 并针对多种因子作了计算。

## 二、基本方程

假设干涉仪的两臂分别位于A和B处, 它们的中心在极坐标上的矢量距离分别为 $\vec{R}_1$ 和 $\vec{R}_2$ , 两者相隔的距离为 $\vec{\rho} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$  (参见图1), 两臂所接收到的光强分别为 $I(\vec{R}_1)$ 和 $I(\vec{R}_2)$ , 所产生的干涉图象的强度由下式确定<sup>[1]</sup>:

$$I = I(\vec{R}_1) + I(\vec{R}_2) + 2\{[I(\vec{R}_1)I(\vec{R}_2)]^{1/2} |A(\rho)| \cos(k\rho + \varphi)\} \quad (1)$$

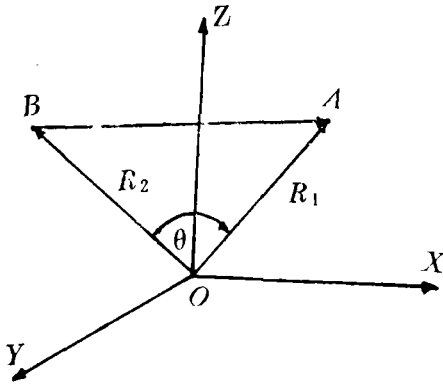


Fig. 1 Sketch of interferometric measurement

式中,  $A(\rho)$  为与仪器系统有关的一个常数,  $R = 2\pi/\lambda$  为波数 ( $\lambda$  为波长),  $\varphi$  为复相干度的相位。

干涉图象的质量通常可用信噪比的概念来评价, 其定义是有用信号电流与噪声电流之比。在直接检测方式中有如下的表达式:

$$S/N = 2i(\vec{R}_1) i(\vec{R}_2) |A(\rho)| / [i(\vec{R}_1) + i(\vec{R}_2)]^2 \quad (2)$$

光束经过大气湍流后, (1) 式中的光强应当采用统计平均值  $\langle I \rangle$ 。考虑到信号电流  $i$  与光强  $I$  成正比, 并令大气湍流所导致的部分为

$$(S/N)_T = 2\langle I(\vec{R}_1)I(\vec{R}_2) \rangle / [\langle I(\vec{R}_1) \rangle + \langle I(\vec{R}_2) \rangle]^2 \quad (3)$$

因此 (2) 式可改写为

$$S/N = K(S/N)_T \quad (4)$$

式中,  $K$  为仪器常数。

根据湍流大气中的光波传播理论, 平均强度可由波的二阶互相干函数  $\Gamma_2(L, \vec{R}, \vec{\rho})$  在  $\rho=0$  时给出, 而强度互相关函数  $\langle I(\vec{R}_1)I(\vec{R}_2) \rangle$  具有如下的表达式:

$$\langle I(\vec{R}_1)I(\vec{R}_2) \rangle = \langle I(\vec{R}_1) \rangle \langle I(\vec{R}_2) \rangle + |\Gamma_2(\vec{R}_1, \vec{R}_2)|^2 \quad (5)$$

上式是在场的复振幅服从正态分布的前提下推导出来的, 在较宽的湍流强度起伏范围内都适用<sup>[2]</sup>。对于单位振幅的空间相干光束, 二阶互相干函数可以写成<sup>[3]</sup>

$$\Gamma_2(L, \vec{R}, \vec{\rho}) = B \exp\{ik/L[1 - B(1 - L/F - g^2/f^2)\vec{R} \cdot \vec{\rho}] - (B\vec{R}/\alpha^2_0) - B[3 - 3(L/F) + (1 + 3g^2/4)f^{-2} + g^2]\rho^2/\rho_0^2\} \quad (6)$$

式中,  $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{R}_1 + \vec{R}_2)$ ,  $\vec{\rho} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ ,  $B = f^2/(1 + f^2 + g^2)$ ,  $f = k\alpha_0^2/L$ ,  $f_1 = f(1 - L/F)$ ,  $g = 2\alpha_0/\rho_0$

$f$  是发射场的菲涅尔数,  $\alpha_0$  为出口处的光束半径,  $L$  为传播距离,  $F$  为光束的波前曲率半径, 在平面波时  $F \rightarrow \infty$ , 在球面波时  $F = -L$ , 在聚焦光束时  $F = L$ 。  $g$  为相对于球面波相干长度  $\rho_0$  的光束宽度 (简称为相对宽度), 是衡量光束内强度相干性大小的一个参数。  $\rho_0$  的表达式是:

$$\rho_0 = 1.438 C_n^{-0.675} k^{-0.675} L^{-3/5} \quad (7)$$

$C_n$  是表征湍流强度的一个参数, 称为折射率结构常数。从 (7) 式可知湍流越强, 相干长度就越短, 也即由于湍流扰动, 光束的相干性越差。

对 (6) 式取  $\rho = 0$ , 即得平均强度的表达式:

$$\langle I(R) \rangle = B \exp\left(-\frac{B}{\alpha_0^2} R^2\right) \quad (8)$$

二阶互相关函数又可写成

$$|\Gamma_2(L, \vec{R}, \vec{\rho})| = [\langle I(\vec{R}_1) I(\vec{R}_2) \rangle]^{1/2} \gamma(\rho) \quad (9)$$

式中,  $\gamma(\rho)$  称为归一化相干函数。从 (6) 式可知

$$\gamma(\rho) = B \exp\{-B[3(1-L/F) + (L/F)^2 + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}](\rho^2/\rho_0^2)\} \quad (10)$$

将 (8) ~ (10) 式代入 (6) 式, 于是得到

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_1) I(\vec{R}_2) \rangle &= \langle I(\vec{R}_1) \rangle \langle I(\vec{R}_2) \rangle \{1 + \gamma^2(\rho)\} \\ &= B^2 \exp[-(B/\alpha_0^2)(2R^2 + \rho^2/2)] \{1 + \exp(-2B[3(1-L/F) + \\ &\quad + (L/F)^2 + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}]\rho^2/\rho_0^2)\} \end{aligned} \quad (11)$$

将上式代入 (4) 式, 最后我们得到信噪比的普遍公式:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_T &= 2 \frac{\exp[-(B/\alpha_0^2)(2R^2 + (\rho^2/2))]}{[\exp(-BR_1/\alpha_0^2) + \exp(-BR_2/\alpha_0^2)]^2} \{1 + \exp \\ &\quad [-2B[3(1-L/F) + (L/F)^2 + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}](\rho^2/\rho_0^2)]\} \end{aligned} \quad (12)$$

上式表明, 大气湍流所影响的信噪比取决于干涉仪双臂配置, 发射场菲涅尔参数以及相对宽度等因素。一旦这些因素确定后即可求得信噪比的数值。下面讨论特定场合的信噪比问题。

### 三、结果与讨论

若干涉仪的两臂伸展得不太远, 处于光强起伏的等晕区内, 并且是对称于光束中心分布

的, 则有  $\langle I(\vec{R}_1) \rangle = \langle I(\vec{R}_2) \rangle = \langle I(\vec{R}) \rangle$ 。于是 (12) 式变为

$$\begin{aligned} (S/N)_T &= \frac{1}{2} \exp[-(B/2)(\rho^2/\alpha_0^2)] \{1 + \exp(-2B[3(1-L/F) + (L/F)^2 + \\ &\quad + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}]\rho^2/\rho_0^2)\} \\ &= \frac{1}{2} \exp[-(2BR^2/\alpha_0^2)\sin^2(\theta/2)] \{1 + \exp(-2B[3(1-L/F) + (L/F)^2 + \\ &\quad + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}](g^2R^2/\alpha_0^2)\sin^2(\theta/2))\} \end{aligned} \quad (13)$$

式中,  $\theta$  为干涉仪双臂之间的夹角。当  $\theta \rightarrow 0$  时,

$$(S/N)_T \rightarrow 1$$

亦即干涉仪的两臂位于同一处时, 信噪比达最大, 这时大气湍流对于干涉测量无影响。

当 $\theta = \pi$ 时, (13) 式成为,

$$(S/N)_T = \frac{1}{2} \exp[-2B(R^2/\alpha_0^2)] \{1 + \exp(-2B[3(1-L/F) + (L/F)^2 + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}]g^2R^2/\alpha_0^2)\} \quad (14)$$

一般情况下 $\theta$ 不可能太小, 否则无法进行干涉测量, 因此湍流导致的信噪比总是小于1。同时 $\theta$ 大都会接近 $\pi$ , 这时 $\sin(\theta/2) \approx 1$ 。所以下面的讨论将以公式(14)为基础。这样做对讨论大气湍流的影响并不失去普遍意义。

对准直光束,  $F \rightarrow \infty$ , 于是(14)式简化为

$$(S/N)_T = \frac{1}{2} \exp[-2B_c(R^2/\alpha_0^2)] \{1 + \exp(-2B_c[3 + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}]g^2R^2/\alpha_0^2)\} \quad (15)$$

$$B_c = f^2/(1+f^2+g^2)$$

对汇聚光束,  $F = L$ , 于是(14)式变为

$$(S/N)_T = \frac{1}{2} \exp[-2B_f(R^2/\alpha_0^2)] \{1 + \exp(-2B_f[1 + (1+3g^2/4)f^{-2} + g^{-2}]g^2R^2/\alpha_0^2)\} \quad (16)$$

$$B_f = f^2/(1+g^2)$$

图2和图3分别是对应于远场( $f=0.1$ )和近场( $f=10$ )条件下有限宽度准直光束的信噪比同不同臂长的关系, 从中可以得知:

1. 在相同的光束宽度下, 臂距越长, 信噪比将越低。这是由于臂距越长两个测点上的强度起伏相关性越差的缘故造成的。
2. 光束的相对宽度越大, 则信噪比也越低。其原因是同上面一样的, 因为在固定的光束宽度下, 相对宽度越大就是球面波相干长度越低, 这意味着湍流越强, 相关性自然就差。

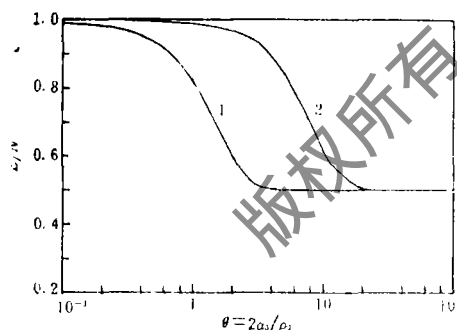


Fig. 2 Signal-to-noise ratio of a collimated beam as a function of the relative width in the far field ( $f=0.1$ )  
1— $R/\alpha_0=0.5$  2— $R/\alpha_0=0.1$

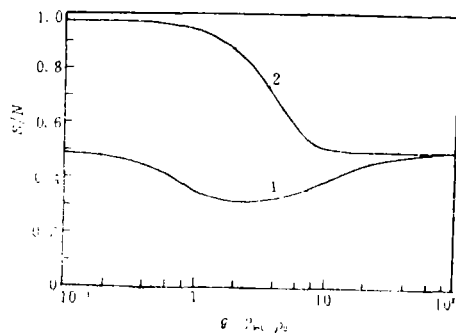


Fig. 3 Signal-to-noise ratio of a collimated beam as a function of the relative width in the near field ( $f=10$ )  
1— $R/\alpha_0=0.5$  2— $R/\alpha_0=0.1$

3. 信噪比在相对宽度达到一定值后将趋向一个常数。从物理观点来看这是由闪烁的饱和效应<sup>[4]</sup>造成的。众所周知, 湍流强度增加到一定程度, 或传播到一定程度的距离后闪烁即不再增加, 因而信噪比也不再降低。

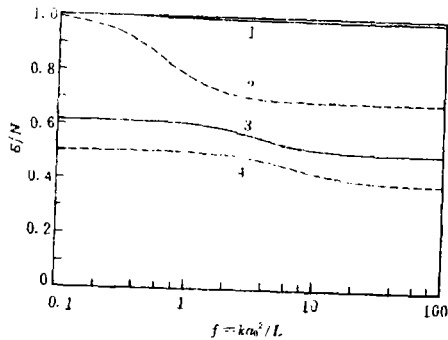


Fig. 4 Signal-to-noise ratio of a collimated beam as a function of Fresnel number

可知, 这时  $B_f \approx B_c$ , 而且第二个指数项中的  $[1 + (3g^2/4)]/f^2$  起不了多大作用, 因此理应得到基本一致的结果。这个结果也可以从物理观点来解释。众所周知, 宽度有限的光束在湍流大气中传播时存在着光束宽度扩展的现象, 而汇聚光束的宽度扩展得尤其快, 其平均强度 (总功率与有效面积之比) 在传播到不太远的一段距离后即与准直光束相同<sup>[5]</sup>, 因此造成了上述结果。但在近场条件下两者差异相当大, 前者在相对宽度较小时信噪比小于极限值。这是由于距离较短时光束的宽度较小, 强度起伏相关的范围就较窄, 较大的相对孔径 ( $R/\alpha_0$ ) 所接收的强度起伏的相关性也就越差。

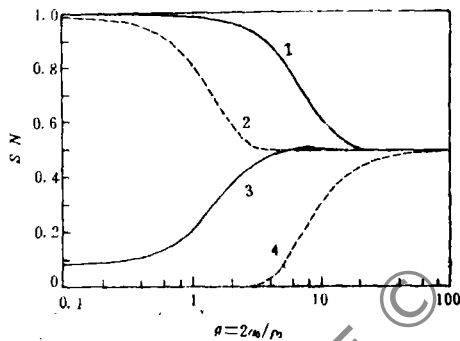


Fig. 5 Signal-to-noise ratio of a focused beam as a function relative width

存在着密切的关系。这一切全可归因于两个测点上的强度起伏相关性如何。这自然也是干涉法测量技术的物理基础。为了取得较大的信噪比, 光束的宽度应当小于球面波相干长度, 测点的间距应当比光束宽度小得多。

我们的分析还表明, 使用汇聚光束没有重要意义, 一般以使用准直光束为宜。

#### 参 考 文 献

- [1] Prilepin M T, Medorikov A S. 大地测量中的折射问题 (布伦纳 F K 编). 北京: 测绘出版社, 1988; 38
- [2] 宋正方. 应用大气光学基础. 北京: 气象出版社, 1990: 100
- [3] Wang S C, Plonus M A. J O S A, 1979; 69(9): 1297
- [4] 宋正方, 孙毅义, 顾慰谕 *et al.* 应用激光. 1983; 3(1): 7
- [5] 石丸 A. 随机介质中波的传播和散射. 北京: 科学出版社, 1986: 470

\*

\*

\*

作者简介: 宋正方, 男, 1935年12月生。研究员。现从事大气光学, 激光与红外辐射传输等研究工作。

收稿日期: 1992年9月20日。 收到修改稿日期: 1993年3月17日。

图4示出准直光束的信噪比与非涅尔参数的关系。图中实线和虚线分别对应于相对孔径  $R/\alpha_0$  为0.1和0.5, 上面两条线 (曲线1和2) 与下面两条线 (曲线3与4) 分别对应于相对宽度  $g$  为0.1和10。该图表明准直光束的信噪比同非涅尔参数的关系不是很密切, 因此不必去刻意寻找一个最佳的  $f$  值。

为了比较图5给出了汇聚光束信噪比随相对宽度的变化, 其前提条件同图4。由图可知在远场条件下 ( $f = 0.1$ ) 曲线1和2同图2的准直光束情况基本相似。另从公式(15)和(16)可知, 这时  $B_f \approx B_c$ , 而且第二个指数项中的  $[1 + (3g^2/4)]/f^2$  起不了多大作用, 因此理应得到基本一致的结果。这个结果也可以从物理观点来解释。众所周知, 宽度有限的光束在湍流大气中传播时存在着光束宽度扩展的现象, 而汇聚光束的宽度扩展得尤其快, 其平均强度 (总功率与有效面积之比) 在传播到不太远的一段距离后即与准直光束相同<sup>[5]</sup>, 因此造成了上述结果。但在近场条件下两者差异相当大, 前者在相对宽度较小时信噪比小于极限值。这是由于距离较短时光束的宽度较小, 强度起伏相关的范围就较窄, 较大的相对孔径 ( $R/\alpha_0$ ) 所接收的强度起伏的相关性也就越差。

#### 四、小 结

从上面的讨论可知, 干涉法测量技术的信噪比受许多因素的制约, 除了传播距离和湍流强度这两个明显的因素之外, 还同相对接收孔

径 ( $R/\alpha_0$ ) 存在着密切的关系。这一切全可归因于两个测点上的强度起伏相关性如何。这自然也是干涉法测量技术的物理基础。为了取得较大的信噪比, 光束的宽度应当小于球面波相干长度, 测点的间距应当比光束宽度小得多。

我们的分析还表明, 使用汇聚光束没有重要意义, 一般以使用准直光束为宜。