文章编号: 1001-3806(2004)02-0199-03

截断拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子

罗时荣[1], 吕百达[1,2]
(1. 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064; 2. 江西师范大学 物理与通信电子学院, 南昌 330027)

摘要: 用广义截断二阶矩方法对截断圆对称拉盖尔-高斯光束的广义光束传输因子(M_G^2 因子)作了研究, 得到了 M_G^2 因子的解析公式, 并用数值计算例作了说明。研究表明, 截断圆对称拉盖尔-高斯光束 M_G^2 因子与截断参数和光束的阶数有关。随着截断参数的增加, M_G^2 因子逐渐趋近于无截断圆对称拉盖尔-高斯光束的光束传输因子值。

关键词: 广义 M^2 因子(M_G^2 因子); 拉盖尔-高斯光束; 圆对称; 截断参数; 广义截断二阶矩
中图分类号: TL632.1; O435; O436.1 文献标识码: A

M_G^2 factor of truncated Laguerre-Gaussian beams

LUO Shi-rong[1], *LÜ Bai-da*[1,2]
(1. Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China; 2. College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract: The generalized beam propagation factor(M_G^2 factor) of circularly symmetric truncated Laguerre-Gaussian beams is studied using the generalized truncated second-order moments method. A closed-form expression for the M_G^2 factor is derived and illustrated with numerical example. It is found that the M_G^2 factor of circularly symmetric truncated Laguerre-Gaussian beams depends on the truncation parameter and beam order, and asymptotically approaches the value of circularly symmetric untruncated Laguerre-Gaissain beams as the truncated parameter increases.

Key words: generalized M^2 factor (M_G^2 factor); Laguerre-Gaussian beam; circular symmetry; truncation parameter; generalized truncated second-order moment

版权所有 © 《激光技术》编辑部

引 言

拉盖尔-高斯光束是一类重要的光束, 迄今, 人们对拉盖尔-高斯光束的传输变换特性已作了深入研究[1~3]。对光束在 *ABCD* 矩阵描述的光学系统中的传输也有研究[3]。另一方面, 基于光强二阶矩定义的光束传输因子, 即 M^2 因子同时考虑了光束的近场和远场分布特性, 并且是一个传输不变量, 已被国际标准化组织(ISO)作为衡量激光光束质量的重要参数之一。但有硬边光阑限制光束的因子计算中会出现发散困难而被排除在 ISO 文件之外[4], 然而, 实际的激光束在产生和传输变换中常要受到硬边光阑的限制, 为使 ISO 标准实用化, 已开展了许多工作, 相继提出了描述受硬边光阑限制光束的多种方法, 其中有代表的有: 广义截断二阶矩法[5]、渐进近似法[6]和自收敛束宽法[7]等。与渐进近似法和自收敛束宽法相比, 广义截断二阶矩法的显著优点是: 用这种方法定义的广义截断二阶矩和无光阑限制光束的二阶矩满足相同的传输方程, 由此定义的截断光束的 M^2 因子(即 M_G^2 因子)是一传输不变量, 并且, 对常见光束能得到解析结果。但将广义截断二阶矩法推广到三维情况遇到理论自洽问题, 以致长期未被推广。但在实际应用中遇到的多数光束都是三维光束, 圆对称光束也经常遇到。最近, 作者在解决了理论自洽的问题后, 已将直角坐标系中的广义截断二阶矩方法推广到柱坐标系中。作者的主要目的是研究截断圆对称拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子。第 1 节中引入了柱坐标系中广义截断二阶矩。第 2 节中利用广义截断二阶矩方法对截断圆对称拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子作了研究, 得出 M_G^2 因子的解析公式, 并作了物理分析。第 3 节中给出了数值计算结果和分析。最后, 对本文中的主要结果作了总结, 并对相关问题作了讨论。

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目(0212021)
作者简介: 罗时荣(1966-), 女, 副研究员, 现主要从事光传输的研究工作。
E-mail: shirongluo@sohu.com
收稿日期: 2003-05-26; 收到修改稿日期: 2003-07-09

1 柱坐标系中广义截断二阶矩的传输方程和广义 M^2 因子(M_G^2 因子)

设场分布为 $E(r, z=0)$ 的圆对称光束入射到位于 $z=0$ 面上半径为 a 的圆孔光阑上, 则光束在 $z=0$ 面上空间域、空间频率域中的广义截断二阶矩 $\langle r^2\rangle_0$, $\langle p^2\rangle_0$ 和交叉矩 $\langle rp\rangle_0$ 定义为[5]:

$$\langle r^2\rangle_0 = \frac{1}{I_0}\int_0^a r^2 \mid E(r,0)\mid^2 r\,\mathrm{d}r \tag{1}$$

$$\langle p^2\rangle_0 = \frac{1}{k^2 I_0}\int_0^a \mid E'(r,0)\mid^2 r\,\mathrm{d}r + \frac{16}{3k^2 I_0}\mid E(a,0)\mid^2 \tag{2}$$

$$\langle rp\rangle_0 = \frac{1}{2ikI_0}\int_0^a \{r[E'(r,0)]^* E(r,0) - rE'(r,0)E^*(r,0)\}\,r\,\mathrm{d}r \tag{3}$$

式中,

$$I_0 = \int_0^a \mid E(r,0)\mid^2 r\,\mathrm{d}r \tag{4}$$

这是入射到光阑内的总功率, "′" 表示对宗量求导(下同)。(1) 式~ (3) 式中已设一阶矩为 0。需要指出的是, (2) 式中等式右边第 2 项 $\mid E(a,0)\mid^2$ 前系数 $\frac{16}{3k^2 I_0}$ 的选取是考虑了公式的自洽性, 即截断平面波的广义 M^2 因子应当是一个与光束维数、截断参数和坐标系无关的常量。

利用 Collins 公式[8] 可证明, 如上所定义的截断光束的广义截断二阶矩与无光阑限制光束的二阶矩遵从相同的传输规律, 即有:

$$\langle r_2^2\rangle = A^2\langle r^2\rangle_0 + B^2\langle p^2\rangle_0 + 2AB\langle rp\rangle_0 \tag{5}$$

$$\langle p_2^2\rangle = C^2\langle r^2\rangle_0 + D^2\langle p^2\rangle_0 + 2CD\langle rp\rangle_0 \tag{6}$$

$$\langle r_2 p_2\rangle = AC\langle r^2\rangle_0 + BD\langle p^2\rangle_0 + (AD+BC)\langle rp\rangle_0 \tag{7}$$

由此推出截断光束也存在一个光束传输不变量——广义光束传输因子(M_G^2 因子):

$$M_G^2 = k\sqrt{\langle r_2^2\rangle\langle p_2^2\rangle - \langle r_2 p_2\rangle^2} = k\sqrt{\langle r^2\rangle_0\langle p^2\rangle_0 - \langle rp\rangle_0^2} \tag{8}$$

(5) 式~ (8) 式为柱坐标系下截断圆对称光束广义截断二阶矩的传输方程和 M_G^2 因子公式。作为这种方法的应用, 下面讨论截断圆对称拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子。

2 截断圆对称拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子

入射到位于 $z=0$ 上, 半径为 a 的圆孔光阑上的圆对称拉盖尔-高斯光束场分布表示为[1]:

$$E(r,0) = \mathrm{L}_n^0(2r^2/w_0^2)\exp(-r^2/w_0^2) \tag{9}$$

式中, w_0 是基模高斯光束的束腰宽度, L_n^s 是角向指数为 s 的 n 阶拉盖尔多项式。将(9) 式代入(1) 式~(3) 式, 并利用不完善伽马函数的定义式[9]:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x \exp(-t)\,t^{\alpha-1}\mathrm{d}t \tag{10}$$

和拉盖尔多项式的递推公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{L}_n^s(x)] = -\mathrm{L}_{n-1}^{s+1}(x) \tag{11}$$

得到截断圆对称拉盖尔-高斯光束的广义截断二阶矩, 表示为:

$$\langle r^2\rangle_0 = \frac{w_0^2}{2}\frac{c_2}{c_1} \tag{12}$$

$$\langle p^2\rangle_0 = \frac{2}{k^2 w_0^2}\times\frac{\left\{c_3 + \frac{32}{3}[\mathrm{L}_n^0(2\beta^2)]^2\exp(-2\beta^2)\right\}}{c_1} \tag{13}$$

$$\langle rp\rangle_0 = 0 \tag{14}$$

式中,

$$\beta = a/w_0 \quad (\text{截断参数}) \tag{15}$$

$$c_1 = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\frac{(-1)^{m_1+m_2}}{m_1!\,m_2!}\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\times\Gamma(m_1+m_2+1, 2\beta^2) \tag{16}$$

$$c_2 = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\frac{(-1)^{m_1+m_2}}{m_1!\,m_2!}\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\times\Gamma(m_1+m_2+2, 2\beta^2) \tag{17}$$

$$c_3 = 4\left[\sum_{m_1=0}^{n-1}\sum_{m_2=0}^{n-1}\binom{n}{m_2+1} + \sum_{m_1=0}^{n-1}\sum_{m_2=0}^{n}\binom{n}{m_2}\right]\times\frac{(-1)^{m_1+m_2}}{m_1!\,m_2!}\binom{n}{m_1+1}\Gamma(m_1+m_2+2, 2\beta^2) + c_2 \tag{18}$$

将(12) 式~ (18) 式代入(8) 式得到截断圆对称拉盖尔-高斯光束的光束传输因子为:

$$M_G^2 = \frac{\sqrt{c_2\left\{c_3 + \frac{32}{3}[\mathrm{L}_n^0(2\beta^2)]^2\exp(-2\beta^2)\right\}}}{c_1} \tag{19}$$

从(19) 式知, 截断圆对称拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子依赖于拉盖尔-高斯光束的阶数 n 和截断参数 β。

当 $\beta\to\infty$(无光阑限制) 时, (19) 式简化为:

$$M^2 = M_G^2(\beta\to\infty) = \frac{\sqrt{c_{20}c_{30}}}{c_{10}} \tag{20}$$

式中:

$$c_{10} = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}(-1)^{m_1+m_2}\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\binom{m_1+m_2}{m_2} \tag{21}$$

版权所有 © 《激光技术》编辑部

$$c_{20} = 2\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}(-1)^{m_1+m_2}m_1\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\binom{m_1+m_2}{m_2} + c_{10} \tag{22}$$

$$c_{30} = 4\left[\sum_{m_1=0}^{n-1}\sum_{m_2=0}^{n-1}\binom{n}{m_2+1} + \sum_{m_1=0}^{n-1}\sum_{m_2=0}^{n}\binom{n}{m_2}\right]\times (-1)^{m_1+m_2}(m_1+m_2+1)\binom{n}{m_1+1}\binom{m_1+m_2}{m_2} + c_{20} \tag{23}$$

虽然(20)式与所熟知的无光阑限制指数为 $s=0$ 的 n 阶拉盖尔高斯光束的 M^2 因子, 即[2]:

$$M^2 = 2n+1 \tag{24}$$

形式上不同, 但数值计算表明用二者所得的结果是一致的。

在(19)式中, 令 $N=2$(高斯光束)得到:

$$M_G^2 = \frac{\sqrt{[1+2\beta^2-\exp(2\beta^2)][2\beta^2-29/3-\exp(2\beta^2)]}}{\exp(2\beta^2)-1} \tag{25}$$

(25)式表明截断圆对称高斯光束的光束传输因子由 β 完全确定。比较(25)式和文献[10]中的(24)式可知, 柱坐标系中和直角坐标系中截断高斯光束的 M_G^2 因子公式是不同的, 这可归因于不同几何形状(圆孔和狭缝)光阑对高斯光束的不同截断。

3　数值计算和分析

利用(16)式~(19)式可计算不同阶次、不同截断程度的圆对称拉盖尔-高斯光束的光束传输因子。图 1 给出了 $n=0,1,2,3,4,5,6,7$ 的截断圆对称拉盖尔-高斯光束的光束传输因子 M_G^2 随截断参数 β 的变化。由图知, 截断基模高斯光束($n=0$)的 M_G^2 因子随 β 增加而单调减小, 最后趋于无光阑限制的高斯光束的 M^2 因子之值, 当 $\beta>2.10$ 时, $M_G^2=M^2=1$。而对于 $n=1,2,3,4,5,6,7$ 的截断拉盖尔-高斯光束的 M_G^2 因子开始随 β 增加而跃阶式地增加, 且跃阶幅度随 n 和 β 的增加而减小, 这可从拉盖尔-高斯光束场分布的振荡特性得到解释。然后, M_G^2 因子随 β 增加逐渐趋于无光阑限制圆对称拉盖尔-高斯光束的 M^2 因子之值, 即对 $n=1,2,3,4,5,6$ 和 7, 当 $\beta>2.38, 2.90, 3.30, 3.62, 3.94, 4.22$ 和 4.46 时, $M_G^2=M^2=3,5,7,9,11,13$ 和 15。

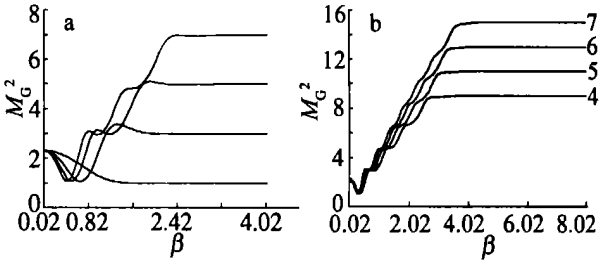

Fig. 1　M_G^2 factor of circularly symmetric truncated Laguerre-Gaussian beams versus truncation parameter β
a—$n=0,1,2,3$　b—$n=4,5,6,7$

4　小　结

用广义截断二阶矩方法对截断圆对称拉盖尔-高斯光束的光束传输因子作了研究, 得到了截断拉盖尔-高斯光束的广义 M^2 因子(M_G^2 因子)的解析公式, 并用数值计算例对所得结果作了说明。当 $n=0$ 时, 公式化为柱坐标系中被圆孔光阑截断高斯光束的广义 M^2 因子公式。当截断参数足够大时, 计算结果与无光阑拉盖尔-高斯光束 M^2 因子一致, 这表明用于截断圆对称光束的广义二阶矩方法在理论上是自洽的, 所得结果是正确的。用本文中定义的截断拉盖尔-高斯光束 M^2 因子是一个传输不变量, 并且截断广义二阶矩的传输满足无截断光束二阶矩相同的传输规律, 具有理论和实际应用意义。当 $s\neq 0$ 时, 拉盖尔-高斯光束的场分布与极角 θ 有关。对无截断拉盖尔-高斯光束的 $M^2=2n+s+1$[2], 当有截断时的广义 M^2 因子亦与角向指数 s 有关, 对此应另作研究。

版权所有 © 《激光技术》编辑部

参　考　文　献

[1] SIEGMAN A E. Lasers. California: Univeristy Science Books Mill Valley, 1986. 647.
[2] 吕百达. 激光光学——激光束的传输变换和光束质量控制. 成都: 四川大学出版社, 1992. 67.
[3] 卿与三, 吕百达. 激光技术, 2002, 26(3): 174~176.
[4] ISO/TC 172/SC 91 WG1N80, ISO/DIS, 1995: 11146.
[5] MARTINEZ-HERRERO R, MEJIAS P M. Opt Lett, 1993, 18: 1669~1671.
[6] PARE C, BELANGER P A. Opt Commun, 1996, 123: 679~693.
[7] AMARANDE S, GIESEN A, HÜGEL H. Appl Opt, 2000, 39: 3914~3924.
[8] COLLINS S A. J O S A, 1970, 60: 1168~1177.
[9] ERDELYI A. Tables of integral transforms. New York: McGraw-Hill, 1954. 431.
[10] LÜ B D, LUO S R. Opt Commun, 2000, 178: 275~281.