

文章编号: 1001-3806(2013)01-0105-04

## 基于自洽方程组及传递函数的腔衰荡信号研究

潘 瑶, 谭中奇, 杨开勇\*, 常欣祖

(国防科学技术大学 光电科学与工程学院, 长沙 410073)

**摘要:** 为了更好地理解腔衰荡技术的物理本质和测量过程从而更好地分析腔衰荡信号, 利用自洽方程组、结合光学无源腔的品质因子  $Q$  值定义对腔衰荡技术的基本原理进行了推导, 并结合该方程组有系数的物理意义, 引入传递函数的概念分析了不同情况下的腔衰荡信号的基本特征。结果表明, 这种分析方式可靠, 可为腔衰荡技术在超低损耗薄膜性能标定及腔内介质的吸收光谱测量等领域的应用提供理论指导。

**关键词:** 光谱学; 腔衰荡技术; 传递函数; 自洽方程组

中图分类号: O433.1 文献标识码: A doi: 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2013.01.026

### Analysis of the cavity ring-down signal based on self-consistent equations and the transfer function

PAN Yao, TAN Zhong-qi, YANG Kai-yong, CHANG Xin-zu

(School of Opto-electric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In order to better understand the physical nature and measurement process of the cavity ring-down technique and analyze the signal, the self-consistent equations and the  $Q$  concept of a passive optical cavity were used to deduce the basic principle. The transfer function was introduced to analyze the essential features of different signals under different conditions. Results show that this analytical method is reliable and can provide theoretical guide for cavity ring-down measurements in different areas such as the calibration of ultra-low loss films and the measurement of the intra-cavity absorption spectrum.

**Key words:** spectroscopy; cavity ring-down technique; transfer function; self-consistent equation

### 引 言

腔衰荡技术(cavity ring-down technique, CRDT)产生于 1984 年, 它由美国 ANDERSON 等人提出, 其最初的目的是解决超低损耗高反膜的性能标定问题<sup>[1]</sup>。相对于其它测量技术或仪器(如分光光度计、差动型透反仪)而言, 腔衰荡技术具有结构简单、测量精度高以及测量结果无需复杂标定等一系列优点。此外, 膜的损耗越小, 其测量精度也越高, 因此该技术特别适合极低损耗测量。目前, 该技术已发展成为低损耗光学膜片(包括高反膜和减反膜)损耗测量的标准方法。近些年, 基于该技术的商业化膜片损耗测量仪器也已出现, 如 LRG 公司研制的腔损仪等。由于腔衰荡技术测量的损耗为无源腔的总损耗, 因此, 该技术除了可测量腔镜损耗外, 还可用于腔内微量气态介质的吸收光谱测量或浓度检测。1988 年, 美国 O'KEEFE 等人首

次将腔衰荡技术应用于腔内氧气分子的禁戒跃迁吸收光谱测量, 得到了约  $10^{-8} \text{ cm}^{-1}$  的测量灵敏度<sup>[2]</sup>, 从而产生了一种新型高灵敏度光谱技术——腔衰荡光谱技术。近些年来, 腔衰荡光谱技术研究及其应用得到了国内外学术界的广泛关注, 该技术目前已被广泛应用于物质定性和定量检测的各种领域<sup>[3]</sup>, 如全球气候变化研究、燃烧诊断、痕量气体检测<sup>[4]</sup>、生物医学应用及农业科技生产等。

腔衰荡技术根据所采用的激光光源性质可分为脉冲型和连续光波型两种<sup>[3]</sup>。相较之下, 连续波腔衰荡技术测量过程稍复杂: 它将一束窄线宽连续激光入射到高品质无源腔内, 当激光频率与无源腔的某纵模重合时, 激光将在衰荡腔内形成稳定谐振, 当衰荡腔的出射光功率大于某预设阈值时, 快速关断激光入射, 随后无源腔的出射光功率将呈单指数衰减。由于腔的衰减时间  $\tau$  与其总损耗  $\delta$  呈简单的反比关系, 因此, 只要测得衰减时间即可求得腔的损耗值。从上述过程可看出, 腔衰荡技术的基础和核心是腔衰荡时间与腔总损耗之间的关系函数。该技术产生初期, ANDERSON 等人基于多光束干涉原理及传递函数<sup>[1]</sup>, 对该关系进行了推导, 得到了两者之间的函数关系式, 为该技术的应

作者简介: 潘 瑶(1990-), 女, 硕士研究生, 主要从事光电检测方面的研究工作。

\* 通讯联系人。E-mail: muyiky@163.com

收稿日期: 2012-05-11; 收到修改稿日期: 2012-05-25

用奠定了理论基础。作者也曾基于能量守恒原理和无源腔的  $Q$  值定义<sup>[5]</sup>对该关系式进行了分析,得到了相同的结论。在此,作者将从最基本的麦克斯韦方程组出发,重新推导该关系式,并引入传递函数,就腔衰荡技术实际测量中某些误差因素对测量的影响进行分析,这对于更好地理解腔衰荡技术的特点和优势具有一定意义,对于该技术的具体应用也有指导作用。

## 1 理论推导

从连续波腔衰荡技术的测量过程可知,腔衰荡现象发生在入射光快速关断后,无源腔内积聚的光子在自由状态下发生逐渐衰减的过程。为简化分析,首先不考虑入射光关断的时间,只考察无源腔在自由状态下的特性。此时根据麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

可以推导出自治方程组<sup>[6]</sup>。式中  $\vec{D}$  为电位移矢量,  $\vec{E}$  为电场强度,且  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , 其中  $\vec{P}$  为介质的极化强度矢量,  $\epsilon_0$  为真空介电常数;  $\vec{H}$  为磁场强度,  $\vec{B}$  为磁感应强度矢量,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\mu_0$  为真空磁导率;  $\vec{J}$  为传导电流,且  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ,  $\sigma$  为介质的电导率。推导过程中使用了一系列近似,主要包括:假定一个电导率为  $\sigma$  的损耗介质以避免边界值问题;在激光介质中  $\nabla \cdot \vec{P} \approx 0$ ;只考虑激光器轴向的场强变化而忽略与轴向垂直方向上的场强变化;采用二能级原子对电场的贡献计算;忽略一些小的变化量等等<sup>[6]</sup>。

由麦克斯韦方程组,经过近似处理导出的自治方程组为:

$$\begin{cases} \dot{E}_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{Q_n} E_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{\epsilon_0} \cdot \text{Im}(P_n) \\ \omega_n + \dot{\varphi}_n = \Omega_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{\epsilon_0} \cdot E_n \cdot \text{Re}(P_n) \end{cases} \quad (2)$$

式中  $n$  代表腔的第  $n$  个模式,是典型值约为  $10^6$  的整数;  $\omega$  为激光的角频率;  $\omega_n$  为腔的第  $n$  个分立模式的角频率;  $\Omega_n = \frac{n\pi c}{L} = k_n c$  为无源腔的谐振角频率 ( $L$  为腔长,  $c$  为光速,  $k_n$  为相应的波数);  $\varphi_n$  为光场相位;上标  $\cdot$  表示求导。根据腔衰荡技术的实际情况,设定分析所用的光学腔为空腔,此时式中  $P_n = 0$ , 方程组(2)式可化为:

$$\begin{cases} \dot{E}_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{Q_n} E_n = 0 \\ \omega_n + \dot{\varphi}_n = \Omega_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dot{I}_n + \frac{\omega}{Q_n} I_n = 0 \Rightarrow I_n = I_0 \exp\left(-\frac{t}{Q_n} \frac{\omega}{\omega_n}\right) \quad (3)$$

式中  $I_n = E_n^2$  为第  $n$  个模式的光场强度。由此可以看出,自治方程组表示在模的振荡频率  $\omega_n + \dot{\varphi}_n$  等于无源腔的谐振角频率  $\Omega_n$ , 且腔内无增益介质时,腔内光场强度随时间呈指数式衰减,其衰荡时间为  $\tau = \frac{Q_n}{\omega}$ <sup>[6]</sup>。

由于光学腔的  $Q_n$  值与腔损耗有关,为此,可以根据  $Q$  值的定义  $Q = \Omega \frac{\theta}{\rho}$ <sup>[5]</sup> 来分析腔的衰荡时间与腔的单程损耗  $\delta$  之间的关系。其中  $\Omega$  为腔模式的角频率,  $\theta$  为腔内储存的总能量,  $\rho$  为单位时间腔损耗的能量,则有:

$$Q_n = \Omega_n \frac{\theta}{\rho} = 2\pi\nu_n \frac{1}{\delta} \frac{L}{c} = \frac{2\pi L}{\delta \lambda_n} \quad (4)$$

式中  $\Omega_n$  表示第  $n$  个模式的角频率,  $\nu_n$  代表第  $n$  个模式的频率,  $\lambda_n$  代表第  $n$  个模式的波长。将此结果代入腔衰荡时间与腔的品质因子  $Q_n$  的关系式,得到:

$$\tau = \frac{Q_n}{\omega_n} = \frac{L}{\delta c} \quad (5)$$

上式就是腔衰荡测量的基础,它表明衰荡时间与腔的损耗简单的反比关系。测量出透射光信号的衰减时间,就可以反推出腔的损耗。

## 2 系统分析

由(3)式可知,理想状况下,快速关断入射光时的光学谐振腔输出光强呈单指数衰减。然而,在腔衰荡技术的发展历程及工程应用中存在各种各样的情况需要分析,譬如入射光的关断时间问题、入射光的不同形式问题等,如何找到一种普适性的分析方法,对腔衰荡技术及其应用具有重要意义。为此,将光学谐振腔看成一个系统,引入信号与系统学科中的传递函数,建立数学模型对此进行分析。分析中需注意的,根据光波的独立传播定律和叠加定律,只要在对光波振幅进行分析时,系统才可看作线性时不变系统。若设连续波腔衰荡系统中入射光强  $I_i = u(-t)$ , 出射光强  $I_o = u(-t) + u(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ , 其中  $u(t)$  为单位阶跃函数,  $\tau$  为腔衰荡时间。则入射光和出射光的复振幅可分别表示为:

$$\begin{cases} E_i = u(-t) \\ E_o = u(-t) + u(t) \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \end{cases} \quad (6)$$

此时,连续波腔衰荡系统可以看作对入射光波进行了

一次运算<sup>[7]</sup>，如图 1 所示。其中符号  $T[ ]$  表示系统运算。

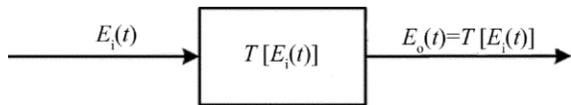


Fig. 1 Continuous-wave cavity ring-down system

为求得系统的传递函数  $H(\omega)$ ，分别对入射光振幅和出射光复振幅进行广义傅里叶变换，得到系统传递函数

$$H(\omega) = \frac{F(E_o)}{F(E_i)} = \frac{1}{1 + 2i\omega\tau}$$

则系统的冲击响应：

$$h(t) = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \quad (7)$$

已知系统的冲击响应和输入光的复振幅，则理论上可通过输入信号与系统冲击响应的卷积求得任意入射光的出射光振幅，即  $y(t) = x(t) * h(t)$ ，进而求得输出光光强。求解过程如图 2 所示。

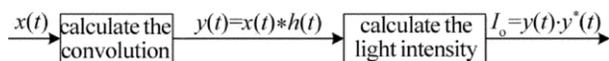


Fig. 2 Process of output signal derivation

### 3 典型应用

基于上述对腔衰荡信号及其系统的分析，来分析两种典型情况下的腔衰荡信号情况。首先分析连续激光的关断时间对腔衰荡测量的影响。可以知道，实际的连续光腔衰荡系统不管采用何种操作方式来切断光注入，都会存在一定的关断时间。例如，机械光开关器件，其开关速度为毫秒级；磁光开关的速度约为微秒级；而电光、声光开关速度最快也就是纳秒级~皮秒级。一些研究已表明，关断时间对腔的透射光信号有影响<sup>[8]</sup>，为此，基于上述推导分析关断时间对腔衰荡测量的影响。假设此时的输入信号振幅为：

$$x(t) = \mu(t) + u(t) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \quad (8)$$

式中  $\mu(t)$  为单位阶跃函数， $\tau_0$  为输入信号的关断时间。则根据图 2 中所示过程可求得输出：

$$y(t) = \frac{\tau}{\tau_0 - \tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) - \frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \quad (9)$$

则输出光强：

$$I_o(t) = y(t) \cdot y^*(t) = \left[ \frac{\tau}{\tau_0 - \tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) - \frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \right]^2 \quad (10)$$

由(10)式可知，当输入信号是衰减常数为  $\tau_0$  的指数衰

减信号时，输出信号不再是形如  $I(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  的理想单指数衰减，而是如(10)式所示的双指数形式。该分析结论与对于该问题前期的基于其它方法的分析结果完全相同<sup>[9]</sup>，它为该问题的解决指明了方向，即为消除入射光关断时间对测量结果的影响，可采用两种方法：(1) 当关断时间较短时，可以舍弃部分衰荡过程的前期信号进行单指数拟合；(2) 当关断时间较长时，可直接对信号进行双指数拟合。

正如前面介绍所述，腔衰荡技术历史上有很多种方案，如脉冲腔衰荡技术、相移腔衰荡技术等，下面来分析相移腔衰荡技术的输出信号形式。在该技术中，对输入光进行正弦调制，即  $I_i(t) = I[1 + \cos(\omega_0 t)]$ ，其中  $\omega_0$  为信号的角频率。为分析方便，设输入信号为  $x(t) = 1 + \cos(\omega_0 t)$ ，则其振幅  $E_i = \sqrt{x(t)} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$ 。由图 2 所示过程进行计算，从而可得输出信号振幅

$$E_o = \frac{2}{1 + \omega^2 \tau^2} \cos\left[\frac{\omega_0 t}{2} - \arctan(\omega\tau)\right]$$

，则输出光强：

$$I_o(t) = y(t) \cdot y^*(t) = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left\{ 1 + \cos[\omega_0 t - 2\arctan(\omega\tau)] \right\} \quad (11)$$

从(11)式可看出，此时输出信号相对于输入信号存在一个相位延时，通过测量该相位延时量即可求得腔的衰荡时间，进而得到腔的损耗值，这就是所谓相移腔衰荡技术的测量原理，该技术最早由 HERBELIN 等人<sup>[10]</sup>提出，并得到应用。

基于此种分析方法对相移法腔衰荡信号的分析结果与参考文献[11]中的结果在相位值上有 2 倍的差。分析可知，差异原因是本系统分析中使用的是振幅而非光强。根据光的独立传播定律和叠加定律，作者认为，使用振幅进行线性系统分析是合适的，因为多光束干涉在腔衰荡过程中时不可避免的，除非采取一些特殊手段避免干涉的发生，如激光离轴入射到无源腔内。

### 4 小结

利用自治方程组，结合光学无源腔的品质因子  $Q$  值定义，对理想情况下光学谐振腔的性质进行了分析，为腔衰荡技术的研究及其应用提供了一种新的分析方式。借用传递函数的概念，求取了光学谐振腔系统的传递函数，据此可求得理想情况下各种输入信号下的输出信号形式。作者将此推导方法应用于两种具体系统中，而理论上该方法及结论适合各种不同情况下的信号分析，因此，对于腔衰荡技术及其应用具有普遍指导意义。

## 参 考 文 献

- [1] ANDERSON D Z , FRISCH J C , MASSER C S. Mirror reflectometer based on optical cavity decay time [J]. *Applied Optics* ,1984 , 23 ( 8) : 1238-1245.
- [2] DEACON D A G , O' KEEFE A. Cavity ring-down optical spectrometer for absorption measurements using pulsed laser sources [J]. *Review of Scientific Instrument* ,1988 59( 12) : 2544-2551.
- [3] BERDEN G , ENGELN R. Cavity ring-down spectroscopy techniques and applications[M]. West Sussex , UK: John Wiley & Song Ltd , 2009: 11-44.
- [4] LI W Ch , SHA X P , LIU Zh J , *et al.* Gas concentration measurement based on fiber-circled cavity ring-down method [J]. *Journal of Applied Optics* 2009 30( 5) : 831-835( in Chinese) .
- [5] ZHOU B K , GAO Y Zh , CHEN T R , *et al.* Laser principles [M]. 6th ed. Beijing: National Defence Industry Press ,2009: 30-31 ( in Chinese) .
- [6] SARGENT III M , SCUUY M O , LAMB W E. Laser physics [M]. Beijing: Science Press ,1982: 114-117( in Chinese) .
- [7] PHILLIPS C L , PARR J M , RISKIN E A , *et al.* Signals , systems and transforms [M]. Beijing: China Machine Press ,2009: 86-87( in Chinese) .
- [8] TAN Zh Q , WANG Zh G , LONG X W. A new theoretical deduction method to CW-CRDS and its application simulation [J]. *Acta Photonica Sinica* 2007 36( s1) : 60-63( in Chinese) .
- [9] TAN Zh Q , LONG X W. Theoretical derivation and experimental research of continuous-wave cavity ring-down technology [J]. *Applied Laser* 2006 , 26( 6) : 452-456( in Chinese) .
- [10] HERBELIN J M , McKAY J A , KWOK M A , *et al.* Sensitive measurement of photon lifetime and true reflectances in an optical cavity by a phase-shift method [J]. *Applied Optics* , 1980 , 19( 1) : 144-147.
- [11] ENGELN R , HELDEN G , BERDEN G *et al.* Phase shift cavity ring down absorption spectroscopy [J]. *Chemical Physics Letters* ,1997 , 262( 1/2) : 105-109.

版权所有 © 《激光技术》编辑部