

文章编号: 1001-3806(2003)01-0076-02

## 复平面中偏振态变换的研究

王吉明 李国华 王伟 薛冬  
(曲阜师范大学激光研究所, 曲阜, 273165)

摘要: 介绍了描述光波偏振态的复平面法, 提出了在复平面上利用偏振传递函数解决偏振光通过延迟器件的偏振态变换问题。这种新的方法具有直观、简便的特点, 适用于各种偏振态的变换。

关键词: 复平面; 偏振态; 偏振传递函数; 延迟器

中图分类号: O436.3 文献标识码: A

## Research of polarization state transferring in complex plane

Wang Jiming, Li Guohua, Wang Wei, Xue Dong  
(Laser Institute, Qufu Normal University, Qufu, 273165)

**Abstract:** This paper introduces the method to describe the polarization state of light wave in complex plane. It also introduces the method to settle the transfer problem of the polarization state using the transfer function when polarized light passes through retardation sheet. The new method has a visualized and simple feature, and is applicable for different transformation of polarization states.

**Key words:** complex plane; polarization state; the transfer function; retarder

### 引言

关于光波偏振态的数学描述已形成系统的理论体系, 主要有以下方法<sup>[1]</sup>: (1) 电矢量法; (2) 布卡尔球作图法; (3) 斯托克斯矢量表示法; (4) 琼斯矢量方法。布卡尔于 1892 年曾介绍过一种复平面法。复平面法对于研究椭圆偏振测量法是一种很方便的工具<sup>[2]</sup>, 但利用其系统地偏振光通过晶体偏光器件前后偏振态变化的研究很少见报道, 因而在偏光领域未受到应有的重视。下面将对这种复平面法进行详细介绍, 并利用复平面中的研究工具——偏振传递函数(PTF), 结合琼斯矩阵给出复平面上偏振光通过延迟片后偏振态的变化。

### 1 复平面中偏振光的表示

由正交坐标系下的琼斯矢量:  $E = [E_x/E_y]$ , 其中  $E_x = |E_x| e^{i\delta_x}$ ,  $E_y = |E_y| e^{i\delta_y}$ 。

取两分量的比值作为复变函数  $x$  的定义:

$$x = E_y/E_x \quad (1)$$

又椭圆振动的琼斯矢量<sup>[2]</sup>:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A e^{i\delta} \begin{bmatrix} (\cos\theta\cos\varepsilon - j\sin\theta\sin\varepsilon) \\ (\sin\theta\cos\varepsilon + j\cos\theta\sin\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2)$$

此式描述了振幅  $A$ 、相位为  $\delta$ 、方位角  $\theta$  且椭圆率为  $\varepsilon$  的椭圆振动。

将(2)式代入(1)式可以得到:

$$x = (\tan\theta + j\tan\varepsilon)/(1 - j\tan\theta\tan\varepsilon) \quad (3)$$

上式说明, 复数  $x$  可以描述一个给定方位角  $\theta$  和椭圆率  $\varepsilon$  的椭圆偏振态(线偏振态和圆偏振态为其特殊形式)。这样就可以通过复数  $x$  与一个复平面上的代表点联系起来。由这些点组成的复平面空间, 就可以将光的各种偏振态表示出来。根据(3)式复数  $x$  的定义, 可以得出以下的对应关系。

(1) 特殊点: 复平面原点——实轴方向线偏振态; 无穷远点——虚轴方向线偏振态。虚轴上两点:  $R(x=j)$ ——左旋圆偏振态;  $L(x=-j)$ ——右旋圆偏振态。(2) 偏振态分布: 实轴表示方位角介于  $\pi/2 \leq \theta < \pi/2$  的线偏振态; 虚轴表示正椭圆偏振( $L, R$  点为特殊情况下的圆偏振); 上半平面表示左旋偏振; 下半平面表示右旋偏振。(3) 两分量具有固定相位差( $\delta_y - \delta_x = \text{常数}$ )的椭圆振动对应点的轨迹是通过原点的一条直线; 两分量具有恒定振幅比值( $|E_y|/|E_x| = \text{常数}$ )的椭圆振动对应点的轨迹是圆心

作者简介: 王吉明, 男, 1977 年 10 月出生。硕士研究生。主要从事激光偏光技术方面的研究与应用。

收稿日期: 2002-03-09; 收到修改稿日期: 2002-06-13

为原点的一个圆。如图 1。

现在推导复平面上表示偏振光通过偏振器件后偏振态变化的偏振传递函数。输入、输出偏振

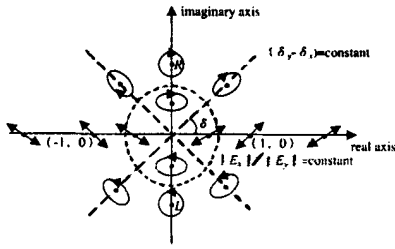


Fig. 1 The corresponding polarization state to every dot in complex plane

椭圆的表征:  $X_i = E_{iy}/E_{ix}, X_o = E_{oy}/E_{ox}$  (4)  
式中,  $X_i$  为入射光,  $X_o$  为出射光。根据入射光波与偏振器件之间的相互作用规律就是光波琼斯矢量表示的简单线形矩阵变换:

$$E_{ox} = T_{11}E_{ix} + T_{12}E_{iy}, E_{oy} = T_{21}E_{ix} + T_{22}E_{iy} \quad (5)$$

将上式代入(4)式, 经过计算可以得到:

$$X_o = (T_{22}X_i + T_{21}) / (T_{12}X_i + T_{11}) \quad (6)$$

这就是偏振光学系统的偏振传递函数(PTF)<sup>[2]</sup>。由上式可以得出: 在复平面上, 只要知道偏振器件的琼斯矩阵, 仅由系统输入端偏振椭圆, 就可以得出系统输出端的偏振椭圆。这种态势的变化可以在复平面上很容易地得出。

## 2 复平面上偏振光通过波片延迟器后偏振态的变换

下面利用偏振传递函数分析复平面上偏振光通过波片延迟器态势的变换。态势变换的实验光路图如图 2<sup>[3]</sup>。其中 P 为起偏镜, Q 为波片延迟器。

调整方法如下: 首先选定延迟器的快轴为  $x$  轴方向, 这个方向与选定的实轴

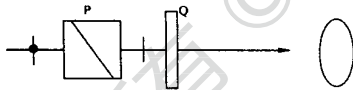


Fig. 2 The situation variation when plane polarized light passes through 1/4 wave plate

方向重合。在实验过程中保持波片不动, 然后让入射光通过偏光镜起偏, 以获得高消光比的平面偏振光; 旋转起偏镜, 使得入射到波片的线偏振光的振动方向旋转  $\theta$  角, 如图 3 所示。此时入射线偏光在复平面上为  $X_i = \tan \theta$ 。

很容易查到, 这种情况下延迟器的琼斯矩阵为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式可以得到:  $X_o = e^{-i\delta}X_i$ , 即:

$$X_o = (\cos \delta - j \sin \delta) X_i \quad (8)$$

(8)式即是分析复平面上态势变化情况的依据。

(1)首先令延迟器为 1/4 波片, 则  $\delta = \pi/2$ 。根

据(8)式可得:

$$X_o = -jX_i \quad (9)$$

(a) 令  $\theta = 0$ , 即令入射到线性延迟器的线偏光振动方向与  $x$  轴重合。此时  $X_i = 0$ , 得到  $X_o = 0$ , 即出射光仍为振动方向与  $x$  轴平行的线偏光。

(b) 令  $0 < \theta < \pi/4$ , 此时入射线偏光在复平面上表示为实轴上介于(0, 0)到(1, 0)之间的点。由(9)式可得出射光为虚轴的负

半轴上介于(0, 0)到(0, 1)之间的点。可以看出: 当  $\theta$  变化时, 随着入射线偏光与  $x$  轴夹角的增大, 出射光(为纯虚数)表现为虚轴上由线偏光到左旋圆偏振光的过渡, 椭率逐渐变大, 在这个过程中偏振椭圆长轴与实轴平行(正椭圆偏振光), 因为实轴与  $x$  轴重合, 所以椭圆长轴也与  $x$  轴重合。

(c) 令  $\theta = \pi/4$ , 此时的入射线偏光为复平面实轴上的(1, 0)点, 由(9)式, 出射光为(0, -1)点, 对应的显然是左旋圆偏振光。

(d) 令  $\pi/4 < \theta < \pi/2$ , 此时的入射线偏光为  $X_i > 1$ , 即为实轴上(1, 0)右边的点, 出射光为复平面虚轴的负半轴绝对值大于 1 的点。当入射线偏光与  $x$  轴夹角  $\theta$  由  $\pi/4$  到  $\pi/2$  的增大, 出射光(为纯虚数)表现为虚轴上由左旋圆偏光到沿  $y$  向偏振的线偏振光的过渡, 椭率逐渐变小, 这个过程中偏振椭圆长轴与虚轴重合(正椭圆偏振光), 即与  $x$  轴垂直。

(e) 令  $\theta = \pi/2$ , 即入射光为复平面上实轴的正半轴上的无穷远点, 出射光为虚轴负半轴上无穷远点, 这两个无穷远点都对应沿  $y$  轴振动的线偏光。

当偏振片继续旋转, 即令  $\pi/2 < \theta < \pi$ , 此时  $X_i$  与以上情况符号相反, 入、出射光在复平面上的位置是以上各对应点对于中心原点的对称点, 这种情况下的出射椭圆偏振光旋向与以上相反。

综合以上分析可以得到: 在复平面上, 入射光为实轴上各点, 出射光为虚轴上的各相对应点。这说明入射到 1/4 波片的线偏振光被转换为正椭圆偏振光(特殊形式为左、右旋圆偏振光), 与用其它方法分析得出的结果相同。

(2) 以上是以 1/4 波片为例分析的复平面中的态势变换。若保持入射光如上变化, 而使相位延迟  $\delta$  发生变化, 根据(8)式可以很容易的得出, 出射光

(下转第 80 页)

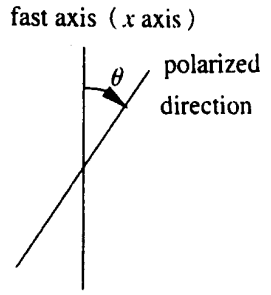


Fig. 3 The include angle between the polarized direction of linearly polarized light and retarder fast axis

像。比较图 2c, 图 2d 和图 2e, 图 2f 可以看出, 在 0.5 阶分数域上, 虽然噪声的高频成分与图像的分数谱有重叠, 但去掉噪声的分数谱的主要部分, 对图像的高频成分基本没有影响, 故滤波后仍然可以得到比较清晰的图像。而在傅里叶频谱面上, 虽然图像的频谱比较集中, 但是其高频成分与噪声的频谱有重叠, 要想滤去噪声, 必然会损失一部分物的高频信息, 致使最后还原的图像变得模糊不清。

由模拟结果可知, 采用分数域上的滤波, 确实能有效地除去图像中的啁啾噪声, 还原出清晰的图像。

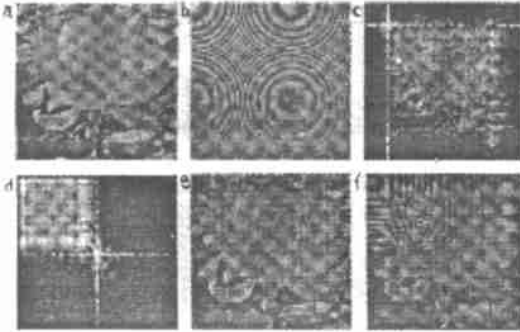


Fig. 2 The simulation results of chirp filtering in fractional Fourier domain applied in digital image processing

a- the original image b- the image being disturbed by a chirp noise c- the distribution of the image and noise in 0.5 fractional Fourier domain d- the Fourier spectrum of the image and noise e- the output image of filtering in fractional Fourier domain f- the output image of filtering in Fourier frequency plane

(上接第 77 页)

将沿复平面上过原点与  $x$  轴成  $\delta$  角度的直线变化, 此时出射光一般为非正椭圆偏振光。这在图 1 中也可以看出。特殊情况为  $\delta = k \times (\pi/2)$  时,  $k$  为整数, 这种情况下出射光或沿实轴变化, 或沿虚轴变化, 比如若取  $\delta = \pi$ , 即延迟器为  $1/2$  波片的情况, 根据以上结论可以得出出射光沿虚轴的负半轴变化。由 (9) 式可以得出出射光与入射光相反:  $x_o = -x_i$ , 这表明出射光仍为线偏光, 但其振动方向与  $x$  轴成  $(\pi/2 - \theta)$  角。

### 3 讨论

实验中采用的是旋转起偏镜而使波片保持不动。同样也可以让起偏镜保持不动, 而使波片旋转, 但要注意快轴 ( $x$  轴) 是与波片一起旋转的。在复平

### 4 结束语

分数傅里叶变换在光学中的引入, 大大扩展了光学信息处理的内容和方式, 同时由于它在处理高频交变噪声问题上的优越性, 使得分数域啁啾滤波的效果大大优于传统的频域滤波。将光学中的分数域啁啾滤波引入到数字图像处理中, 提出了一种新的改善数字图像质量的手段。模拟结果与实验结果表明, 这种方法能有效地除去图像中的高频噪声 (啁啾噪声), 而图像的高频信息损失很少, 能复原得到清晰的原始图像。

### 参 考 文 献

- [1] Bernardo L M, Soares O D D. J O S A, 1994, A11(10): 2622~2626.
- [2] Mendlovic D, Ozaktas H M. J O S A, 1993, A10(9): 1875~1881.
- [3] Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A, 1993, A10(12): 2522~2531.
- [4] Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. Appl Opt, 1995, 34(2): 303~309.
- [5] Dorsch R G, Lohmann A W, Bitran Y *et al.* Appl Opt, 1994, 33(32): 7599~7602.
- [6] Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A, 1995, A12(4): 743~751.
- [7] Lohmann A W. J O S A, 1993, A10(10): 2181~2186.
- [8] Ozaktas H M, Arıkan O, Kutay M A *et al.* IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(9): 2141~2150.

面上经过类似的分析, 也能得出上述结果。通过以上的论述, 可以得出: 在复平面中讨论偏振光态势的变换问题, 具有直观明了、运算简化等特点, 其最主要的优点是它能将所有的全偏振光都表示在一个复平面之内, 并且很容易得出出射光随入射光和相位延迟器延迟角  $\delta$  变换的规律。因此, 这种复平面法能够作为一种新的研究偏振态问题的工具。

### 参 考 文 献

- [1] 尚世铤. 近代物理实验(II). 北京: 高等教育出版社, 1993: 163~165.
- [2] 阿查姆 R M A, 巴夏拉 N M 著. 椭圆偏振测量术和偏振光. 北京: 科学出版社, 1986: 18~20, 55~60.
- [3] 金国藩, 李景镇. 激光测量学. 北京: 科学出版社, 1998: 211~247.
- [4] 竺庆春, 陈时胜译. 矩阵光学导论. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991: 207.